Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
25.03.2017.

VI разред

1. Конструиши троугао ако је $c = 4\text{cm}$, $a + b = 9\text{cm}$ и $\alpha = 75°$.

2. Симетрале спољашњих углова троугла ABC образују троугао чији су унутрашњи углови 30°, 70°, 80°. Израчунај унутрашње углове троугла ABC.

3. Рационални бројеви a, b и c су такви да је један позитиван, један негативан и један једнак нули. Ако је $\frac{(b-a)\cdot(c-b)}{b} < 0$, одреди који од тих бројева је нула, који позитиван, а који негативан.

4. На табли је написан израз
$$2 : 3 : 5 : 7$$
Дописивањем два пара заграда на разне начине, добијају се изрази са различитим вредностима. Одреди све могуће резултате који се на тај начин могу добити.

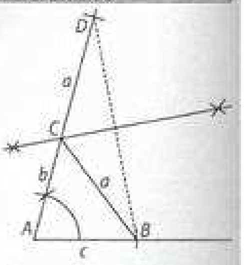
5. Колико има природних бројева мањих од 10000 чији је производ цифара 42?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Уочимо троугао *ABC* у коме важе услови задатка. Како је дат збир страница a и b, уочимо на полуправој AC тачку D такву да је $AD = a + b$. У троуглу ABD познате су нам две странице и угао обухваћен њима па га можемо конструисати [**10 поена**]. Троугао BCD је једнакокрак ($BC = CD$) па се теме C налази на симетрали основице BD. Дакле, треће теме троугла налази се у пресеку симетрале странице BD и полуправе AC [**10 поена**] чиме смо одредили сва три темена троугла. [Уколико ученик не конструише угао од 75° већ га нацрта одузети 5 поена].



2. Нека су A_1, B_1, C_1 темена добијеног троугла (A_1 је пресек симетрала спољашњих углова код B и C датог троугла, итд.), при чему су његови углови $\alpha_1 = 30°$, $\beta_1 = 70°$, $\gamma_1 = 80°$. Тада је, из троугла BCA_1, $\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) + \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) + 30^\circ = 180^\circ$ [**10 поена**], одакле је $\frac{\beta+\gamma}{2} = 30^\circ$, $\beta + \gamma = 60^\circ$ и $\alpha = 120°$ [**5 поена**]. Слично се добија $\beta = 40°$, $\gamma = 20°$ [**5 поена**].

3. (**МЛ 50/5**) Мора бити $b \neq 0$ [**4 поена**]. Даље постоје две могућности:
а) Ако је $a = 0$, дата неједнакост се, скраћивањем са b, своди на $c - b < 0$ [**4 поена**], па мора бити $c < 0$ и $b > 0$ [**4 поена**].
б) Ако је $c = 0$, скраћивањем се добија $-(b - a) < 0$, тј. $b - a > 0$ [**4 поена**], па мора бити $b > 0$ и $a < 0$ [**4 поена**].

4. Постоји 5 могућности распореда заграда који дају 4 различита резултата:
$((2:3):5):7 = \frac{2}{105}$; $(2:3):(5:7) = \frac{14}{15}$; $2:((3:5):7) = \frac{70}{3}$; $(2:(3:5)):7 = \frac{10}{21}$;
$2:(3:(5:7)) = \frac{10}{21}$. (довољно је навести један од два случаја који дају резултат $\frac{10}{21}$)
[Сваки тачан резултат **по 5 поена**]

5. Очигледно постоје два таква двоцифрена броја: 67 и 76 [**2 поена**]. Троцифрени бројеви са том особином се формирају од цифара 2, 3, 7 (има их 6: 237, 273, 327, 372, 723, 732 [**4 поена**]) или 1, 6, 7 (такође 6: 167, 176, 617, 671, 716, 761 [**4 поена**]).
За четвороцифрене бројеве постоје следеће могућности:
а) цифре 1, 2, 3, 7 (24 броја: 1237, 1273, 1327, 1372, 1723, 1732, затим, слично, 6 бројева са првом цифром 2, 6 са првом цифром 3 и 6 са првом цифром 7) [**5 поена**];
б) цифре 1, 1, 6, 7 (12 бројева: 1167, 1176, 1617, 1671, 1716, 1761, 6117, 6171, 6711, 7116, 7161, 7611) [**5 поена**].
Дакле, укупно има 2 + 6 + 6 + 24 + 12 = 50 таквих бројева.
Напомена: Ученици не морају да пишу конкретна решења у датим случајевима.